論理的思考は部分整合性を乗り越えられるか

植野義明 *

概要

In mathematics education, it goes without saying that training of logical thinking skills is important. By the way, what is logical thinking power? It is possible at the intuition level to judge whether the answer paper or academic report is written logically, but it is difficult to clarify and explain the judgment criteria. While many students feel that it is necessary to adhere to the given calculation rules correctly, It is also a fact that there are learners whose ability to search appropriate calculation rules and apply rules according to the scene is remarkably low. In this paper, we will pay attention to the behavioral principle dominated by partial consistency, which appears to be logical in a sense, and think about how to salvage a student who fell into this strategy.

key words : partial consistency, logical thinking

1　先行研究

本論文のテーマである部分整合性は、従来の教育心理学では誤ったルールの適用の問題として、古くは幼児教育において Bruner や Piajet によって論じられてきた [5, 11, 12]。それによると、ある年齢の子どもは、図形の周の長さが長い方が囲む面積も大きくなるだろうと認識しているとのことである。

また、日本では誤答分析の研究の流れの中で、1990 年代ごろに図形の面積学習に対する周の長さの影響という観点から小学校における教育実践研究の立場から研究された [6, 7, 8, 9, 10]。

本稿では、主として理工系大学 1 年次の低学力層とよばれる学生たちに典型的な誤答に関して、そのメカニズムを推測する立場から論じてみたい。

2　部分整合性

はじめに、部分整合性とはどういったものであるかを分かりやすい例で示す*1。

たとえば、英語で写真を意味する単語である (1) photograph を学び、フォウトグラフと発音できるようになると、次に写真術を意味する (2) photography という単語に出合ったときにこれをフォウトグラフィーと発音してしまうことがある。これは、ESL の学習者が陥りやすい典型的な間違いとして知られている。英語には、(2) 以外にも photographer, photographic など、(1) を語根とするいくつかの単語がある。これらの単語を学ぶ際には、互いの類似性・系統性を利用することができるが、注意しなければならないことは、初学者は、発音については辞書を引いたりネイティヴの発音を聴いたりして 1 つ 1 つ覚えていかなければならないことである。

これらの単語の発音を理論的に学ぶには、語幹に語尾が付加されたときのアクセントの位置の移動に関する観測されている法則を学ぶ必要がある。もし、そのような法則を学ぶほどの労力を英語学習に掛けたくない場合は、それぞれの単語ごとに発音を覚えていかなくてはならない (ネイティヴの子どもは、発達過程を通して、そのような法則を自然に身に着けるものと思われる)。

もし、(1) photograph の発音はフォウトグラフであるという事実から、(2) photography の発音はフォウトグラフィーでなければならないと考える学習者がいるなら、その人は**部分整合性**による誤謬に

* 東京工芸大学工学部基礎教育研究センター准教授,
2017 年 9 月 26 日受理。
*1 この例は言語学から取りました。

陥っていると説明することができる。

もし、英語学習の目的が、実際に使われている英語 (自然言語としての英語) を運用できるようになることであるならば、このような言語における整合性の欠如を受け入れなければならない。

わたしたちが素朴な概念として考える ‘整合性’ は、部分整合性であることが多い。また、部分整合性の追及は数学という学問の特徴の 1 つでもある。このことについては後述する。

英国の数学教育学者 David Tall は、米国の言語学者 George Lakoff が提案したメタファーという枠組みを取り入れ、それをメット・ビフォア（Met-before）という独自の用語として定義し、数学教育では、生徒が低学年で形成したメタファーが高学年の学習では裏切られる局面があることに着目している [4, 5]。Tall によれば、このような変容の過程こそが、完成された数学的理論とは異なる数学教育現場における日常的な数学の生成発展過程の特徴であるという。

3　微積分はなぜ難しいのか

微積分法を要約すると、微分法と積分法という 2 つの算法からなる計算方法である。どちらも計算法であるという意味では、微積分以前の数学の正当な嫡子であるということができる。

ところが、微積分法ではそれまでの算術では成り立っていた整合性、数学の一分野であることから当然期待される整合性が成り立たない。

例えば、関数 (1) $y = \sin(x^2)$ を微分せよという問題[*2]。に対して、よくある誤答は (2) $y' = \cos(x^2)$, (3) $y' = \sin(2\,x)$, (4) $y' = \cos(2\,x)$ などである。これらの誤答がどのようにして生成されたのかを考えよう[*3]。

既習事実として、公式

$$(\sin(t))' = \cos(t)$$

があるとする。この「公式」に $t = x^2$ を「代入」すると

$$(\sin(x^2))' = \cos(x^2)$$

となる。これは、誤答 (2) である。ここで、「代入」は数学的に認められた行為であることに注目する必要がある。実際、数学とは問題で与えられた数値や数式を公式に代入する行為であるというテーゼには反論しがたい強さがあり、このような問題の場合は、このような単純な「代入」が許されないことを本人に説得することは難しい。それには、関数の概念が必要である。

誤答 (3) については、このような「代入」では説明できないが、それを拡張した「変形規則」という概念を用いると説明できる。既習事項が変形規則

$$' : x^2 \to 2\,x$$

であるとしよう。すると、この「規則」の適用から

$$' : \sin(x^2) \to \sin(2\,x)$$

という結果が得られたとしても不思議ではない。問題で与えられた数式から既習の規則が適用できる部分を検出し、規則を適用することによって正答に至るという学習戦略にしたがっている学生にとっては ‘自然な’ 解答である。

最後に、誤答 (4) は、誤答 (2) と (3) をそれぞれ支配している行動原理の両方を同時に適用した結果である。

数式への代入も変形規則の 1 つなので、上記の 3 つの誤答をすべて 1 つの表にまとめることができる。

$$\begin{array}{ccc}\sin(x^2) & \to & \cos(x^2)\\ \downarrow & & \downarrow\\ \sin(2\,x) & \to & \cos(2\,x)\end{array}$$

部分整合性は、最近の微積分の答案では頻繁に現れる。その原因として、(1) 関数概念の欠如と、(2) 学習に掛ける時間の長時間化が原因ではないかと思われる。

合成関数 $f(g(x))$ は、その部品となっている関数 $f(x)$、$g(x)$ とはまったく別のものであること、合成

[*2] 正答は $y' = 2\,x\,\cos(x^2)$ であるが、以下の誤答のいずれとも似ていない。

[*3] 考察は、Chomsky の生成文法理論から示唆を得た。

してできる関数がもとの関数からは予想もできないようなものになっているかもしれないことに対する想像力の欠如、すなわち関数概念の欠如は、以前から存在していた。合成関数の微分則がどのようなものになるかは考察を要する未知の事項であり、そこに規則性があるかどうかすらも予め自明ではないという状況認識が欠けている。

その原因をさらにたどれば、関数概念が高校までの数学教育の中で醸成されて来ていないこと、高校までの数学の問題に対しては、書き換え規則の暗記で対処可能であることが挙げられる。

学習に掛ける時間の問題は、小学校段階で身についているはずの加減乗除や分数計算が身体化されておらず、微積分では無意識にできていないと困るこれらの数値計算にも意識的に取り組まなければならない事例が増えていることが原因ではないかと思われる。すなわち、現代の大学のリメディアル教育(補修教育) では、学習しなければならない規則の個数が、人間の脳が同時に習得できる規則の数を越えているのではないだろうか。

例として、最近わたしが遭遇した事例では、筆算による整数の割り算をしない学生が観測された。彼女は、$144 \div 12$ の計算を、筆算による掛け算

$$\begin{array}{rrrl} & 1 & 2 & \\ & \square & \square & (\times \\ \hline 1 & 4 & 4 & \end{array}$$

の「虫食い算」として解いていたのである。

次の例が示すように、部分整合性によるアプローチが有効な場合もある。

$$\left(x^2 + 2\,x^3\right)' = 2\,x + 6\,x^2$$

ここで使用されている数学的な規則は微分演算の線型性

$$\left(x^2 + 2\,x^3\right)' = \left(x^2\right)' + 2\,\left(x^3\right)'$$

であるが、与えられた数式 $x^2 + 2\,x^3$ の中から、既知の公式によって微分できる 2 つの部分 x^2、x^3 を検出し、部分整合性を使用したとみることもできる。

積分の計算についても同様であり、誤答例の枚挙に暇(いとま)がないほどである。代入による誤答の典型例は

$$\int \frac{1}{\tan x}\,dx = \log|\tan x| + C$$

であり、書き換え規則による誤答の典型例は

$$\int \frac{2\,x}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2}{x + \frac{x^3}{3}} + C$$

である。以上の誤答例は、下位クラスの小テストの答案では毎年、必ず見られる。

数式は便利なものであるが、初学者は数式の意味を考えずに文字の配列として処理してしまう。数学の規則には書き換え規則として解釈できるものも多いが、微積分の公式はそうではない。却って難しくなるが、関数そのものではなく、微分形式を用いることにすれば、もとになる公式

$$d(\sin(t)) = \cos(t)\,dt$$

から、$t = x^2$ と $dt = 2\,x\,dx$ を同時に代入して

$$d(\sin(x^2)) = \cos(x^2)\,2\,x\,dx$$

となり、微分操作が代入だけによって処理可能になる。t に $g(x)$ を代入したら、同時に dt には $g'(x)\,dx$ を代入しなければならないとするのである。

4　ベクトルはなぜ難しいのか

前節では主として微積分に特有の計算の困難さについて論じた。では、極限の概念を要しない代数学の分野では、学生はこのような困難さを経験していないのだろうか。

この節では、理工系大学 1 年次の「線形代数」の入門部分の単元である「ベクトル」の演算について、この層の学生たちに典型的な誤答パターンの例を取り上げよう。

問題　ベクトル $\boldsymbol{a} = (3,\,4)$ の大きさ $|\boldsymbol{a}|$ を求めなさい。

この問題に対し、次のような誤答が学生の答案に毎年繰り返して現れている。

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2} = \sqrt{(3,\,4)^2} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$$

この解答はいろいろな意味で誤りであるが、たとえば $\boldsymbol{a}^2 = (3,\,4)^2 = 3^2 + 4^2$ という計算は教科書では

見慣れないものである。通常ではこのような‘ベクトルの 2 乗’が定義されることはなく、自分自身との内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=3^2+4^2$ を用いるべきである。

しかし、この誤答は単なる記号上の誤りに過ぎないのだろうか。毎年同様の誤答が繰り返されることから、ここには別のメカニズムが働いていると推測される。

誤答の原因は、高等学校 1 年次の「数学 I」で学習する公式

$$|x|=\sqrt{x^2}$$

である。この公式は x が実数であるときに成り立つものであるが、特に学力の低い学生は、既知の公式をベクトルについても無理やりに適用してしまう傾向がある。

しかし、もし、x が複素数ならば、根号の中は $x\,\bar{x}$ でなければならない。

このように、対象とする数の範囲が実数から複素数へ、あるいはベクトルへと広がるにつれて公式は形を変え、また、名称も実数や複素数の絶対からベクトルの大きさ、あるいは長さ、あるいはノルムへと変更される。上の例では計算の結果はたまたま正しいが、計算は誤りであり、その背景にある概念は理解されていないということができる。

これも、実数の範囲では成り立っていた公式を、公式が成り立つ条件や範囲を考慮せずに適用してしまう例であるということができるだろう。

5　論理的思考力とは

論理的思考力は数学の学習を通してでないと効率的な習得は難しいという主張を含め、論理的思考力を養成することが数学教育にとって重要であるという論がよく聞かれる。その一方で、思考力や表現力は国語教育の使命であるとする意見もある。では、論理的思考力とはいったい何かと問うと、数学教育を専門としている者にも明確に答えることは難しいようである。

数学者 Zvi Artstein は、Daniel Kahneman による心理学的・計算機科学的研究 [2] を参照しながら論理的思考を直観的思考と対比して論じ、数学において特徴的な論理的思考は、日常的な思考でつねに用いられている直観的思考とは異なることを指摘し、その違いを丁寧に指導することが数学教育の改善に役立つと論じている [1, 3]。

数学における議論は、他分野におけるそれと比べて極めて厳密で論理的であり、役に立つという主張もよく聞かれる。一方で、数学の専門家が論理的思考力について言及するとき、そこで想定されている論理が高校数学で学習する「かつ」「または」「～でない」「ならば」の 4 つの論理演算の運用能力に限定されていることもまた、ありがちな事実である。

では、論理的思考力とは何だろうか。

本稿でここまで論じてきた部分整合性は論理的思考力を 1 つの価値として認め、その完成へと向かって進んでいく思想の素朴な萌芽としての役割を担っているとはいえるだろう。

西洋分析哲学の祖であるデカルトは、「困難は分割せよ」と述べたといわれている。問題を小さな問題に分割し、それらの解を統合することによって当初の問題の解に接近することができる。分析と総合という方法論の有効性は西洋文明によって証明されたが、その際、部分がどのように全体を構成しているのかは別の問題である。

部分整合性の誤謬は、扱おうとする問題の種類ごとに、そこで有効に働く別種の論理があり、それぞれの論理に適用限界があることを示唆している。このような原理を公理という。

プラトンは、問題の場面に応じて現象を支配している公理を探り当てる智恵をエピステーメーという言葉でよんだといわれている。理論を公理から構築することに成功した幾何学や物理学のような分野がある一方で、生物学のように何が公理なのかがまだ解明されていない分野もある。

公理が与えられればそれを使って定理を証明することはコンピューターでも可能だろう。しかし、公理を探り当てることは、少なくともその努力を楽しんで行うことは、人間だけに出来る能力であると思われる。

数学以外の分野に進む人たちが数学あるいは数学史の学習から大きな示唆を得る可能性があるとすれ

ば、それは数学における公理主義について知ることによってではないだろうか。

謝辞
本論文の作成にあたり、ご指導いただきました玉川大学教授守屋誠司先生に心より感謝いたします。

参考文献

[1] Zvi Artstein, Mathematics and the Real World: The Remarkable role of Evolution in the Making of Mathematics, Prometheus Books, Amherst NY, 2014 (translated from Hebrew by Alan Hercberg).

[2] Daniel Kahneman, Thinking, Fast and Slow, international reprint edition by Farrar Straus & Giroux, 2013, paperback.

[3] Zvi Artstein, What to teach and how to teach mathematics: A proposal for a reform (a draft in Hebrew, Oct. 2015).

[4] George Lakoff & Rafael Nuñez, Where Mathematics Comes From: How The Embodied Mind Brings Mathematics Into Being, paperback edition, Basic Books, 2001.

[5] David Tall, How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics, Cambridge University Press, 2013

[6] 守屋誠司、進藤聡彦、面積概念におけるコンピューターを利用したカバリエリの方法導入の試み、日本教育方法学会紀要「教育方法学研究」第 15 号、(1989), 109–116.

[7] 工藤与志文、概念的知識の適用を阻害する要因について—「等周長問題」はなぜ難しいのか？—札幌学院大学人文学会紀要、第 83 号 (2008-03), 1–15.

[8] 大道一弘、等周長問題における高さ判断の役割、教授学習心理学研究、第 8 巻、第 1 号 (2012), 1–11.

[9] 西村克彦、面積判断における周長の影響—その実態と原因—教育心理学研究、第 36 巻、第 2 号、25–33(1988).

[10] 工藤与志文、白井秀明、小学生の面積学習に及ぼす誤ルールの影響、教育心理学研究、第 39 巻、第 1 号、21–30(1991).

[11] Bruner, J.S. et al., Studies in cognitive growth, John Wiley & Sons (1966) (岡本他訳、認識能力の成長、明治図書、1969).

[12] Piaget, J., Inhelder, B., and Szeminska, A., The child's conception of geometry, Basic Bookd, 1960.